

الدرس 13

المستقيمات والمستوي

1. مرجح نقط

1-1 مرجح نقطتين

تعريف

A و B نقطتان و α, β عددين حقيقيين بحيث $\alpha + \beta \neq 0$ عندئذ توجد نقطة وحيدة G

من الفضاء بحيث $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالعاملين α و β على الترتيب.

نتيجة

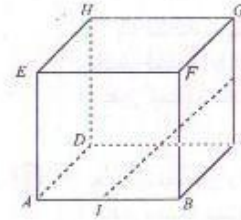
- مرجح نقطتين A و B مرفقتين بنفس العامل غير للعدوم هو منتصف $[AB]$.
- المرجح G للنقطتين المختلفتين A و B ينتمي إلى المستقيم (AB) .
- إذا كان α و β لهما نفس الإشارة فإن G تنتمي إلى $[AB]$.
- إذا كان α و β مختلفان في الإشارة فإن G تقع خارج $[AB]$.

خاصية

إذا كان G مرجح الجملة المثلثة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ مع $\alpha + \beta \neq 0$ فإنه من أجل كل نقطة

M من الفضاء يكون $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$

اجب بصحيح أو خطأ مع التبرير لكل من المعلومات التالية:



$$\vec{AC} \cdot \vec{AI} = 0,5 \quad (1)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AI} = \vec{AI} \cdot \vec{AB} \quad (2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{IJ} = \vec{AB} \cdot \vec{IC} \quad (3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{IJ} = \vec{AB} \cdot \vec{IC} \cos \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

نرود الآن الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

5- معادلة المستوي (EIJ) هي $6x - 7y + 8z - 3 = 0$

6- معادلة المستوي (EFI) هي $x = 0$

7- الشعاع الذي إحداثياته $(-4, 1, 2)$ ناظم للمستوي (FIJ) .

8- حجم الرباعي الوجوه $(EFIJ)$ يساوي $\frac{1}{6}$.

30 - $ABCDEFGH$ مكعب نرمز له ب (T) طول حرفه a .

ليكن (T) رباعي الوجوه $AFCH$.

1-1 بين أن وجوه الرباعي $AFCH$ مكونة من مثلثات متقايسة الأضلاع.

ب) بين أن الحجم V_1 لرباعي الوجوه $AEFH$ يساوي $\frac{a^3}{6}$.

ج) بين أن الحجم V_2 لرباعي الوجوه $AFCH$ يساوي $\frac{a^3}{3}$.

د) استنتج مسافة النقطة A عن المستوي (HFC) .

2- نغزل رباعي الوجوه $AFCH$ ولتكن J منتصف $[FC]$

أ) بين أن المستقيمين (AH) و (FC) متعامدان.

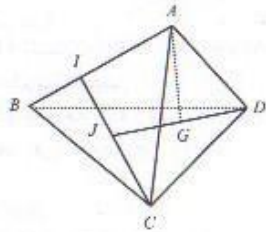
ب) احسب $\vec{JA} \cdot \vec{JH}$ بدلالة a ، ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للزاوية $\angle AJH$.

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ و } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ و } x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

- (3) إذا لم تكن النقط C, B, A على استقامة واحدة فإن مرجحها ينتمي إلى المستوي (ABC)
 (4) إذا لم تكن النقط C, B, A على استقامة واحدة ومرفقة بمعاملات لها نفس الإشارة فإن مرجحها G يقع داخل المثلث ABC .

تمرين تدريبي 1

$ABCD$ رباعي وجوه، أنشئ G مرجح الجملة $\{(D, 10), (C, 5), (B, 3), (A, 2)\}$



نجمع A و B لأن مجموع معاملاتها يختلف عن الصفر.
 ولتكن I مرجح A و B المرفقتين بـ 2 و 3 على الترتيب

$$2 \overrightarrow{IA} + 3 \overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ تحقق}$$

$$\text{ومنه نستنتج } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$$

نجمع C و I لأن مجموع معاملاتها يختلف عن الصفر.

بما أن I و C لهما نفس العامل 5 فإن مرجحهما J منتصف $[IC]$

بما أن J و D لهما نفس العامل 10 فإن مرجح النقطتين J و D هو منتصف $[DJ]$

تمرين تدريبي 2

ABC مثلث، ولتكن النقط K, J, I منتصفات القطع $[BC], [CA], [AB]$ على التوالي. بين أن متوسطات هذا المثلث متقاطعة.

الحل

بما أن I منتصف $[BC]$ هي مرجح الجملة $\{(B, 1), (C, 1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ هي نفسها مرجح الجملة $\{(A, 1), (I, 2)\}$
 إذن G هي نقطة من المستقيم (AI)

بما أن J منتصف $[CA]$ هي مرجح الجملة $\{(C, 1), (A, 1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ هي نفسها مرجح الجملة $\{(B, 1), (J, 2)\}$
 إذن G هي نقطة من المستقيم (BJ) .

بنفس الكيفية نبين أن G تنتمي إلى المستقيم (CK)

إذن G تنتمي إلى تقاطع المستقيمات $(AI), (BJ), (CK)$.

مثال -

C, B, A ثلاث نقط موضوعة كما في الشكل:

- (1) أوجد العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة A مرجح النقطتين C و B المرفقتين بالعاملين α و β على التوالي
 (2) أنشئ G مرجح الجملة $\{(A, 3), (B, -2)\}$.

الحل

$$(1) \text{ الشعاعان } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC} \text{ مرتبطان خطيا و } \overrightarrow{AC} = -2 \overrightarrow{AB}$$

$$\text{إذن } 2 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ ومنه نستنتج أن } A \text{ هي مرجح الجملة } \{(B, 2), (C, 1)\}$$

$$(2) \text{ القول أن } G \text{ هي مرجح الجملة } \{(A, 3), (B, -2)\}$$

$$\text{يكافئ القول أن } \vec{0} = 3 \overrightarrow{GA} - 2 \overrightarrow{GB} \text{ أي } \overrightarrow{AG} = -2 \overrightarrow{AB} \text{ ومنه فإن } G \text{ منطبقة على } C$$

2-1 مرجح ثلاث نقط أو أكثر

تعريف

لتكن C, B, A ثلاث نقط و α, β, γ أعداد حقيقية بحيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ وعندئذ توجد

$$\text{نقطة وحيدة } G \text{ من الفضاء بحيث } \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

هذه النقطة هي مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

خاصية 1

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ مع $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء $(M$ تنتمي إلى المستوي (ABC)) يكون:

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

مبرهنة

لتكن ثلاث نقط C, B, A وثلاثة أعداد حقيقية α, β, γ بحيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ هو نفسه مرجح الجملة

$$\{(A, \alpha), (B, \beta)\} \text{ مع } \{(H, \alpha + \beta), (C, \gamma)\}$$

خاصية 2

(1) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا معاملات النقط في أو على عدد حقيقي غير معدوم.

(2) إذا كانت C, B, A إحداثياتها $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C)$ على

التوالي في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فإن إحداثيات G مرجح الجملة

$$\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\} \text{ مع } \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \text{ هي:}$$

2 التمييز المرجحي

1-2 التمييز المرجحي لمستقيم وقطعة

في الفضاء كما في الهندسة المستوية.

- المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M بحيث $\vec{AM} = t \vec{AB}$ مع t يمسح \mathbb{R} .

- القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M بحيث $\vec{AM} = t \vec{AB}$ مع t يمسح المجال $[0, 1]$.

مبرهنة

(1) المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مراجح الجملة $\{(A, 1-t), (B, t)\}$ مع t عدد حقيقي كفي.

(2) القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M مراجح الجملة $\{(A, 1-t), (B, t)\}$ مع t عدد حقيقي كفي من $[0, 1]$.

الإثبات

t عدد حقيقي كفي.

القول أن M هي مرجح الجملة $\{(A, 1-t), (B, t)\}$ يكافئ القول أن:

$$\vec{AM} = \frac{t}{(1-t)+t} \vec{AB} = t \vec{AB}$$

وعليه المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح الجملة $\{(A, 1-t), (B, t)\}$ لـ t يمسح \mathbb{R}

$[AB]$ هي مجموعة مراجح الجملة $\{(A, 1-t), (B, t)\}$ لـ t يمسح $[0, 1]$

ملاحظة

القطعة $[AB]$ تمثل كذلك مجموعة كل مراجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

مع α و β عدنان حقيقيان موجبان تماما.

لأن المرجح M للجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ هو مرجح الجملة:

$$\left\{ \left(A, \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right), \left(B, \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) \right\} \text{ أي } \{(A, 1-t), (B, t)\} \text{ مع } t = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \text{ و } t \in [0, 1]$$

تمرين تدريبي

$ABCD$ رباعي وجوه، I و K منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي.

J و L نقطتان بحيث $\vec{AJ} = \frac{3}{4} \vec{AB}$ و $\vec{AL} = \frac{1}{4} \vec{AD}$ و G هي منتصف $[IL]$

بين أن النقط I, G و K على استقامة واحدة.

الحل

لإثبات أن ثلاث نقط على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن واحدة منها هي مرجح الأخرتين.

من العلاقة $\vec{AL} = \frac{1}{4} \vec{AD}$ نستنتج أن L هي مرجح الجملة $\{(A, 3), (D, 1)\}$

ومن العلاقة $\vec{CJ} = \frac{3}{4} \vec{CB}$ نستنتج أن J هي مرجح الجملة $\{(C, 1), (B, 3)\}$

لتكن G' مرجح الجملة $\{(A, 3), (D, 1), (C, 1), (B, 3)\}$

باستعمال خاصية التجميع تكون G' هي مرجح

الجملة $\{(L, 4), (J, 4)\}$

إذن G' منطبقة على G منتصف $[IL]$.

لكن I هي مرجح $\{(A, 3), (B, 3)\}$

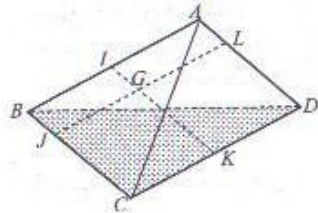
و K مرجح $\{(C, 1), (D, 1)\}$

إذن وحسب خاصية التجميع تكون G' هي مرجح

الجملة $\{(I, 6), (K, 2)\}$.

وعليه G هي مرجح الجملة $\{(I, 3), (K, 1)\}$

إذن النقط I, G, K تقع على استقامة واحدة.



2-2 التمييز المرجحي لمستوي ومثلث

مبرهنة

لتكن C, B, A ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء.

(1) كل نقطة من المستوي (ABC) هي مرجح النقط C, B, A

(2) كل نقطة تقع داخل المثلث ABC هي مرجح النقط C, B, A الرافقة بمعاملات موجبة تماما.

الإثبات

(1) لتكن M نقطة من المستوي (ABC) ، الأشعة $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AM}$ من نفس المستوي

وعليه يوجد عدنان حقيقيان x و y بحيث $\vec{AM} = x \vec{AB} + y \vec{AC}$

$$\vec{AM} = x(\vec{AM} + \vec{MB}) + y(\vec{AM} + \vec{MC})$$

$$\vec{AM} = x \vec{AM} + x \vec{MB} + y \vec{AM} + y \vec{MC}$$

$$-\vec{AM} + x \vec{AM} + y \vec{AM} + x \vec{MB} + y \vec{MC} = \vec{0}$$

$$(-1+x+y) \vec{AM} + x \vec{MB} + y \vec{MC} = \vec{0}$$

$$(1-x-y) \vec{MA} + x \vec{MB} + y \vec{MC} = \vec{0}$$

بما أن $(1-x-y) + x + y = 1 \neq 0$ فإن M هي مرجح الجملة $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$

(2) لتكن M مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ مع $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ و $\gamma > 0$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$ عندئذ I تنتمي إلى $[BC]$.

وحسب خاصية التجميع فإن M هي مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (I, \beta + \gamma)\}$

وبما أن $\alpha > 0$ و $\beta + \gamma > 0$ فإن M تنتمي إلى $[AI]$

إذن M تقع داخل المثلث ABC .

وبالعكس:

إذا كانت نقطة M تقع داخل

المثلث ABC فإن المستقيم (AM)

يقطع (BC) في النقطة I

حيث I تنتمي إلى $[BC]$.

إذن يوجد عدنان حقيقيان $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ بحيث I هي مرجح $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$.

لكن M تقع على $[AI]$ إذن يوجد عدد حقيقي $\alpha > 0$ بحيث M هو مرجح الجملة

$\{(A, \alpha), (I, \beta + \gamma)\}$

وحسب خاصية التجميع فإن M هي مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ رباعي وجوه. بين أن النقط D, C, B, M تنتمي إلى نفس المستوي معيناً

موضع النقطة M بحيث $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{DA}$

الحل

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{DA}$$

$$\vec{MD} + \vec{DA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{DA}$$

$$\vec{MD} + \vec{DA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \quad (1)$$

نعتبر الجملة $\{(B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$

بما أن مجموع معاملات النقط D, C, B لا يساوي الصفر فإن النقطة M هي مرجح الجملة

$\{(B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$

إذن النقطة M تنتمي إلى المستوي (BCD) .

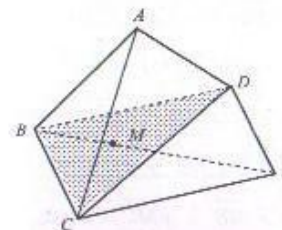
ومنه فإن النقط D, C, B, M تنتمي إلى نفس المستوي (BCD)

العلاقة (1) تصبح:

$$\vec{MB} + \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{MB} + \vec{BD} = \vec{0}$$

$$3\vec{MB} + \vec{BC} + \vec{BD} = \vec{0}$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{BD}) = \frac{1}{3}\vec{BJ}$$



3- التمثيل الوسيط

1-3 التمثيل الوسيط لمستقيم - قطعة مستقيمة ونصف مستقيم

القضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

مبرهنة

ليكن (d) مستقيم مار بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a, b, c)$ مع

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

النقطة M ذات الإحداثيات (x, y, z) تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t

$$(S) \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \text{ بحيث } t \in \mathbb{R}$$

الإثبات

M تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث $\vec{AM} = t\vec{u}$ (1)

إذا كانت إحداثيات M هي (x, y, z) فإن إحداثيات الشعاع \vec{AM} هي:

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ والشعاع \vec{u} إحداثياته (a, b, c)

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \text{ إذن ومن المساواة (1) نستنتج}$$

ملاحظة

(1) الجملة (S) تسمى بالتمثيل الوسيط للمستقيم (d) في المعلم المتعامد والمتجانس.

(2) المستقيم (d) ليس له تمثيل وسيطي وحيد لأنه متعلق باختيار \vec{u} و A .

(3) إذا كتب التمثيل الوسيط لمستقيم (d) على الشكل (S) فيمكننا حينها القول أن

الشعاع $\vec{u}(a, b, c)$ هو شعاع توجيه (d) وأن النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ تنتمي إلى (d)

(4) من أجل كل عدد حقيقي t نرفق النقطة الوحيدة:

$M(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$ من (d) وبالعكس من أجل كل نقطة M من (d)

وافق عدد حقيقي وحيد t بحيث $\vec{AM} = t\vec{u}$

نتيجة

A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء. نضع $\vec{AB} = \vec{u}$

- انتماء نقطة M إلى القطعة $[AB]$ يعني أن إحداثياتها تحقق (S) مع $t \in [0, 1]$

- انتماء النقطة M إلى نصف المستقيم (AB) يعني أن إحداثياتها تحقق (S)

و $t \in [0, +\infty)$

تمرين تدريبي

- (d) مستقيم تمثيله الوسيط $\begin{cases} x=6-2t \\ y=-1+6t \\ z=1+2t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$ (S)
- هل النقطة $A(4, 5, 2)$ تنتمي إلى (d) ؟
 - لتكن النقطتان $B(2, 6, 0)$ و $C(4, 0, -2)$ هل المستقيم (d) يوازي (BC) ؟
 - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

الحل

(1) تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي وحيد t يحقق الجملة :

$$(I) \dots\dots\dots \begin{cases} x_A = 6 - 2t & \dots (1) \\ y_A = -1 + 6t & \dots (2) \\ z_A = 1 + 2t & \dots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $t=1$ ومن (3) نجد $t=\frac{1}{2}$ ومن (2) نجد $t=1$

إذن لا توجد قيمة لـ t تحقق الجملة (I) وعليه فالنقطة A لا تنتمي إلى (d)

(2) لدينا $\vec{BC}(2, -6, -2)$ وشعاع توجيه (d) هو $\vec{u}(-2, 6, 2)$.

الشعاعان \vec{BC} و \vec{u} مرتبطان خطيا وعليه فالمستقيمان (BC) و (d) متوازيان.

(3) المستقيم (BC) يشمل B وشعاع توجيهه \vec{u} وعليه التمثيل الوسيط لـ (BC) هو :

$$t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x=2-2t \\ y=6+6t \\ z=2t \end{cases}$$

2-3 التمثيل الوسيط لمستو

C, B, A ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M بحيث $\vec{AM} = t \vec{AB} + s \vec{AC}$

$\vec{AB}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{AC}(\alpha', \beta', \gamma')$ هما شعاعي توجيه المستوي (ABC)

مبرهنة

المستوي (ABC) المار من النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاعي توجيهه \vec{AB} و \vec{AC} هو مجموعة

$$\text{النقط } M(x, y, z) \text{ التي تحقق } \begin{cases} x = x_0 + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_0 + t\beta + s\beta' \\ z = z_0 + t\gamma + s\gamma' \end{cases} \text{ مع } (t, s) \in \mathbb{R}^2 \dots\dots (S)$$

تسمى الجملة (S) بالتمثيل الوسيط للمستوي (ABC)

تمرين تدريبي

- لتكن $A(1, 2, -1)$ ، $B(0, 1, 2)$ ، $C(1, 3, 0)$ نقط من الفضاء
- بين أن النقط C, B, A ليست على استقامة واحدة.
 - عين التمثيل الوسيط للمستوي (ABC).
 - هل النقطة $D(2, 3, 1)$ تنتمي إلى المستوي (ABC) ؟

الحل

(1) لدينا $\vec{AB}(-1, -1, 3)$ ، $\vec{AC}(0, 1, 1)$

الشعاعان \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا ومنه النقط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

(2) التمثيل الوسيط للمستوي (ABC) المار من A وشعاعي توجيهه \vec{AB} و \vec{AC} هي الجملة

$$(S) \dots\dots \begin{cases} x=1-t \\ y=2-t+s \\ z=-1+3t+s \end{cases} , (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

(3) النقطة D تنتمي إلى (ABC) إذا وفقط إذا وجد عددا حقيقيا وحيدان s و t يحققان الجملة (S)

$$D \text{ تنتمي إلى } (ABC) \text{ يعني أن } \begin{cases} x_D = 1-t \\ y_D = 2-t+s \\ z_D = -1+3t+s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2=1-t & \dots (1) \\ 3=2-t+s & \dots (2) \\ 1=-1+3t+s & \dots (3) \end{cases}$$

بتعويض إحداثيات D نجد

من (1) نجد $t=-1$ نعوض t في (2) و (3) نجد $\begin{cases} s=0 \\ s=5 \end{cases}$

s ليس وحيدا وبالتالي النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

تمرين تدريبي

$$(1) (P_1) \text{ مستوي تمثيله الوسيط هو } \begin{cases} x=1+2t-s \\ y=-t-2s \\ z=t \end{cases} \text{ مع } (t, s) \in \mathbb{R}^2 \text{ (S)}$$

أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (P_1) .

(2) ليكن (P_2) مستوي معادلته الديكارتية $2x+y-z+1=0$ أوجد التمثيل

الوسيطي للمستوي (P_2) .

الحل

(1) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P_1) يعني إيجاد علاقة بين x, y, z مستقلة عن الوسيطين t و s

$$\begin{cases} x=1+2t-s \dots (1) \\ y=-t-2s \dots (2) \\ z=t \dots (3) \end{cases}$$

نعوض t بما يساويها في (2) نجد $y = -z - 2s$ ومنه نجد $s = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$

نعوض t و s في المعادلة (1) نجد $x = 1 + 2z + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$

بالتبسيط نجد $-2x + y + 5z + 2 = 0$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي $-2x + y + 5z + 2 = 0$

لتكن $A(0,1,1)$ نقطة من المستوي (P)

$$\vec{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + (2x+y)\vec{k}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + 2x\vec{k} + y\vec{k} = x(\vec{i} + 2\vec{k}) + y(\vec{j} + \vec{k})$$

$$= x\vec{u} + y\vec{v}$$

حيث $\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,1,1)$

$\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,1,1)$ شعاعان مستقلان خطيا وبالتالي يمثلان شعاعي توجيهه (P)

وعليه التمثيل الوسيط لـ (P) المار من A وشعاعي توجيهه \vec{u} و \vec{v} هو :

$$(S) \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=2t+s+1 \end{cases} \text{ مع } (t,s) \in \mathbb{R}^2$$

4. تقاطع مستويين

• ترجمة هندسية

ليكن (P) و (P') مستويين مختلفين.

نعلم أن هذين المستويين إما أن يكونا متوازيين تماما أو متقاطعين.

إذا كان \vec{n}_1 ناظم (P) و \vec{n}_2 ناظم (P') فإن المستويين (P) و (P') متوازيان إذا وفقط إذا

كان \vec{n}_2 و \vec{n}_1 مرتبطين خطيا.

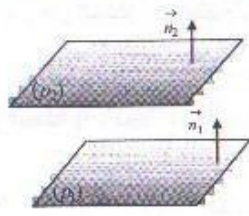
خاصية

ليكن (P) و (P') مستويين مختلفين وناظهما على التوالي \vec{n}_1 و \vec{n}_2

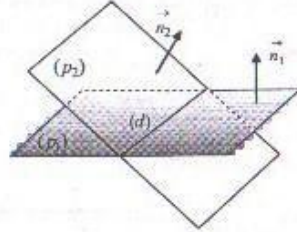
إذا كان \vec{n}_2 و \vec{n}_1 مرتبطين خطيا فإن المستويين (P) و (P') متوازيان، وبالتالي ليس لهما

نقاط مشتركة.

إذا كان \vec{n}_2 و \vec{n}_1 مستقلين خطيا فإن (P) و (P') متقاطعان في مستقيم (d)



(P_1) و (P_2) متوازيان.



(P_1) و (P_2) متقاطعان.

• ترجمة جبرية

(P) و (P') مستويان معادلتهما على التوالي $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$

مع $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ و $(a',b',c') \neq (0,0,0)$ وناظهما $\vec{n}_1(a,b,c)$ و $\vec{n}_2(a',b',c')$

\vec{n}_2 و \vec{n}_1 مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كانت الأعداد a,b,c متناسبة مع الأعداد a',b',c'

a,b,c متناسبة مع a',b',c' يعني أن $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

خاصية

المستويان (P) و (P') ذوا المعادلتين $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$ على التوالي

متقاطعان إذا وفقط إذا كانت الثلاثية (a,b,c) غير متناسبة مع الثلاثية (a',b',c') .

إذا كان \vec{n}_2 و \vec{n}_1 مستقلين خطيا فإن كل نقطة M من المستقيم (d) الناتج من تقاطع

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \text{ تحقق الجملة } (x,y,z) \text{ لهما إحداثيات}$$

وللحصول على التمثيل الوسيط للمستقيم (d) نأخذ كوسيط t أحد المتغيرات x, y أو z

ثم نحل جملة ذات معادلتين بالجهولين الباقيين واللذان نعبّر عنهما بدلالة t .

تمرين تدريبي

(P) و (P') مستويان معادلتهما على التوالي $2x+y+z-1=0$ و $x+3y+2z-3=0$

بين أن هذين المستويين متقاطعان في مستقيم (d) ، ثم عين تمثيلا وسيطيا له.

✓ الحل

ناظم (P) هو $\vec{n}_1(2,1,1)$ وناظم (P') هو $\vec{n}_2(1,3,2)$

بما أن $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$ فإن \vec{n}_2 و \vec{n}_1 مستقلان خطيا.

وبالتالي (P) و (P') متقاطعان في مستقيم (d) .

إذا كانت $M(x,y,z)$ من (d) فإن (x,y,z) تحقق الجملة $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+3y+2z-3=0 \end{cases} \dots (I)$

بوضع $z=t$ فإن الجملة (I) تصبح كما يلي $(II) \dots \dots \dots \begin{cases} 2x+y+t-1=0 \\ x+3y+2t-3=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}t \\ y = -\frac{3}{5}t+1 \\ z = t \end{cases}$$

5. جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم

رأينا سابقا أنه إذا كان ناضما (R) و (P_2) مستقلين خطيا فإن تقاطع (R) و (P_2) هو مستقيم (d) أي أنه إذا كانت الأعداد الحقيقية a, b, c غير متناسبة مع d, b', c'

فإن جملة المعادلتين $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ تعبر عن انتماء النقطة $M(x, y, z)$ إلى المستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P_2) .

عكسيا يمكن اعتبار كل مستقيم من الفضاء كتقاطع لمستويين ومنه فإن كل مستقيم نعر

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

عنه بجملة معادلتين ديكارتيتين من الشكل d, b', c' حيث a, b, c غير متناسبة مع d, b', c'

خاصية

مجموعة النقط من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق الجملة :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ d'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \text{ و } a, b, c \text{ غير متناسبة مع } d, b', c' \text{ هي مستقيم.}$$

تمرين تدريبي 1

(1) $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$$(I) \text{ بين أن جملة المعادلتين } \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \text{ تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين}$$

لستقيم (d) .

(ب) عين تمثيلا وسيطيا لـ (d) .

✓ الحل

$$(I) \text{ لكي تمثل } \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \text{ جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم } (d)$$

يجب أن تكون الأعداد $-1, 1, 1$ غير متناسبة مع الأعداد $2, 1, 2$

وبالفعل فإن الثلاثية $(1, 1, -1)$ غير متناسبة مع الثلاثية $(2, 1, 2)$.

$$(d) \text{ إذن الجملة } \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \text{ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم}$$

(ب) إذا كانت $M(x, y, z)$ نقطة من (d) فإن (x, y, z) تحقق الجملة :

$$(S) \dots \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\text{بوضع } z=t \text{ فإن الجملة } (S) \text{ تصبح كما يلي } \begin{cases} x+y-t-2=0 \\ 2x+y+2t=0 \end{cases}$$

وبعد حل هذه الجملة نجد $x=-3t-2$ و $y=4t+4$

$$\text{إذن الجملة } \begin{cases} x=-3t-2 \\ y=4t+4 \\ z=t \end{cases} \text{ تمثيلا وسيطيا لـ } (d).$$

تمرين تدريبي 2

$$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ معلم للفضاء. لنكن الجملة } \begin{cases} x=2t+3 \\ y=t-2 \\ z=-t+3 \end{cases} \text{ تمثيلا وسيطيا لمستقيم } (d).$$

عين عن (d) بجملة معادلتين ديكارتيتين.

✓ الحل

$$\begin{cases} x=2t+3 \dots (1) \\ y=t-2 \dots (2) \\ z=-t+3 \dots (3) \end{cases}$$

من (3) نجد $t=-z+3$ نعوض عبارة t في (1) و (2)

$$(I) \dots \dots \dots \begin{cases} x+2y-9=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} \text{ بالتبسيط نجد } \begin{cases} x=2(-z+3)+3 \\ y=(-z+3)-2 \end{cases}$$

إذن الجملة (I) هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d) .

6. تقاطع مستقيم ومستوي

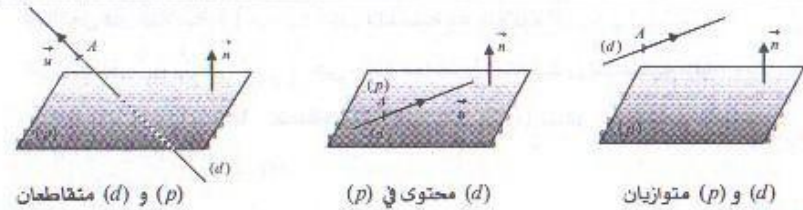
• ترجمة هندسية

ليكن مستقيم (d) ومستوي (p)

نعلم أن المستقيم (d) إما أن يكون محتوي في (p) أو أن يكون موازيا تماما له أو متقاطعا معه.

ليكن \vec{n} شعاع توجيهه (d) و \vec{n} ناضم للمستوي (p)

(d) و (p) متوازيان إذا وفقط إذا كان \vec{n} عموديا على \vec{n}



خاصية

ليكن (d) مستقيم مار بالنقطة A وشعاع توجيهه \vec{u} و (p) مستوي شعاع ناظمه \vec{n} .
- إذا كان \vec{u} و \vec{n} غير متعامدين فإن (d) يقطع المستوي (p) .
- إذا كان \vec{u} و \vec{n} متعامدين فإن (d) محتوي في (p) لا A تنتمي إلى (p) ولا توجد نقاط مشتركة بينهما إذا كانت A لا تنتمي إلى (p) .

• ترجمة جبرية

نفرض أن معادلة (p) هي $ax + by + cz + d = 0$ مع $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ والمستقيم (d) يمر بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ مع $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$

التمثيل الوسيط لـ (d) هو $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

المستقيم (d) يقطع المستوي (p) إذا وفقط إذا كان $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$ أي $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$

خاصية

المستوي ذو المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ والمستقيم ذو التمثيل الوسيط $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

متقاطعان إذا وفقط إذا كان $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.
- إذا كان (d) و (p) متقاطعين فإن تعيين نقطة تقاطعهما يؤدي إلى حل جملة مكونة من معادلة (p) ومعادلات (d)

أي حل الجملة $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \dots (1) \\ y = y_0 + t\beta \dots (2) \\ z = z_0 + t\gamma \dots (3) \\ ax + by + cz + d = 0 \dots (4) \end{cases}$ ذات المجاهيل x, y, z

ولحل هذه الجملة نعوض x, y, z بما يساويها في المعادلة (4) مما يسمح لنا بتعيين قيمة t أولاً ثم نعوض قيمة t في عبارة كل من x, y, z نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع.

ملاحظة

لا يكون (d) معرف كتقاطع مستويين (P_1) و (P_2) فإن البحث عن تقاطع (d) مع (P) يؤدي إلى تعيين تقاطع المستويات (P_1) و (P_2) .

تمرين تدريبي

A و B نقطتان إحداثياتهما $(3, 1, -2)$ و $(0, 2, 1)$ على الترتيب،
و (p) مستوي معادلته الديكارتية $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$
بين أن المستقيم (AB) يقطع (p) في نقطة I معيناً إحداثياتها.

✓ الحل

لدينا $\vec{AB}(-3, 1, 3)$ و $\vec{n}_{(p)}(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

بما أن $1(-3) + (-\frac{1}{2})(1) + \frac{1}{2}(3) = -2 \neq 0$

فإن (AB) يقطع (p) في نقطة I إحداثياتها (x, y, z) تحقق الجملة :

بتعويض إحداثيات A في الجملة الأخيرة نجد :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \dots (1) \\ y = 1 + t \dots (2) \\ z = -2 + 3t \dots (3) \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0 \dots (4) \end{cases}$$

بتعويض x, y, z في المعادلة (4) نجد $t = \frac{1}{4}$

إذن $x = 3 - 3(\frac{1}{4}) = \frac{9}{4}$ و $y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ و $z = -2 + 3(\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}$

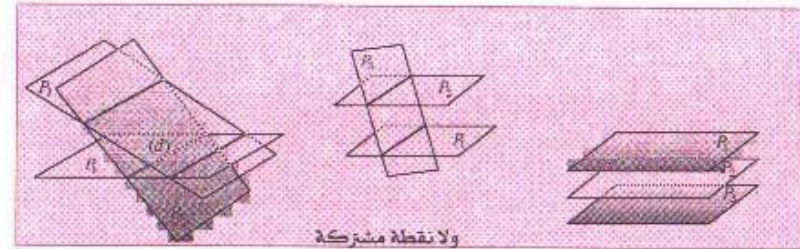
وبالتالي $I = (\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$

7. تقاطع ثلاثة مستويات

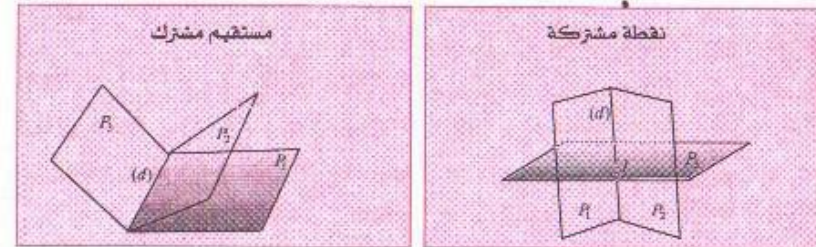
• ترجمة هندسية

- إذا كان مستويان من بين الثلاثة منطبقين فإن دراسة تقاطع المستويات الثلاثة يؤدي إلى دراسة تقاطع مستويين.

- إذا كانت المستويات الثلاثة مختلفة متنى متنى فمن أجل تعيين تقاطعها يجب علينا أن ندرس تقاطع (P_1) و (P_2) أولاً ثم تقاطع $(P_1) \cap (P_2)$ مع (P_3) وكل الحالات الممكنة ملخصة في الجدول التالي :



ولا نقطة مشتركة



مستقيم مشترك

نقطة مشتركة

• ترجمة جبرية

مستويات معادلاتها على الترتيب : $(P_1), (P_2), (P_3)$

مع $ax + by + cz + d = 0$ مع $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

مع $d'x + b'y + c'z + d' = 0$ مع $(d', b', c') \neq (0, 0, 0)$

مع $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ مع $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$

تعيين تقاطع الثلاثة مستويات يؤول إلى حل جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل

$$(S) \dots \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

الجملة (S) إما ليس لها حلول أولها حل وحيد أو لها ما لا نهاية من الحلول

والجدول التالي يلخص كل الحالات لمجموعة حلول الجملة (S) :

مجموعة حلول الجملة (S)	تقاطع (P_1) و (P_2) و (P_3)
خالية	لا توجد أي نقطة مشتركة
ثلاثية وحيدة	نقطة مشتركة وحيدة $I(x, y, z)$
كل الثلاثيات (x, y, z) حلول المعادلتين المعرفتين لـ (d)	مستقيم (d) ، (d) معرف باثنتين من ثلاث معادلات.
كل الثلاثيات (x, y, z) حلول لواحدة من المعادلات	مستوي (حالة $P_1 = P_2 = P_3$)

تمرين تدريبي

المستويات $(P_1), (P_2), (P_3)$ معرفة بمعادلاتها الديكارتية التالية :

$$(P_1) : x + y + 2z + 2 = 0 \quad (P_2) : 2x + y - z - 1 = 0 \quad (P_3) : x - y + 2 = 0$$

ادرس تقاطع المستويات (P_1) و (P_2) و (P_3) .

✓ الحل

$$(S) \dots \begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 \dots (1) \\ 2x + y - z - 1 = 0 \dots (2) \\ x - y + 2 = 0 \dots (3) \end{cases}$$

$$(S') \dots \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2 - x \\ z = 3x + 1 \end{cases}$$

$$\text{من الساتين } z = -2 - x \text{ و } z = 3x + 1 \text{ نستنتج } x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{إذن } z = -\frac{5}{4} \text{ و } y = \frac{5}{4} \text{ بالتالي } (P_1), (P_2), (P_3) \text{ متقاطعة في النقطة } I(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$$

تطبيق نوذجية



تطبيق 1

إثبات الإستقامية باستعمال المرحج

$ABCD$ رباعي وجوه و α عدد حقيقي، I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي، E و F نقطتان بحيث $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = \alpha \overrightarrow{BC}$ و H منتصف $[EF]$.
(1) تحقق أن E مرشح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (D, \alpha)\}$ وأن F مرشح الجملة $\{(B, 1-\alpha), (C, \alpha)\}$.
(2) بين أن H مرشح الجملة $\{(D, \alpha), (C, \alpha), (A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha)\}$.
(ب) استنتج أن I, J و H على استقامة واحدة.

الحل

(1) - المساواة $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD}$ تصبح $\overrightarrow{AE} = \alpha (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED})$ أي $(1-\alpha) \overrightarrow{AE} - \alpha \overrightarrow{ED} = \vec{0}$

وبضرب هذه الأخيرة في (-1) نجد $(1-\alpha) \overrightarrow{AE} + \alpha \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ وهذا يعني أن E مرشح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (D, \alpha)\}$

- المساواة $\overrightarrow{BF} = \alpha \overrightarrow{BC}$ تكتب على الشكل $\overrightarrow{BF} = \alpha (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC})$ أي $(1-\alpha) \overrightarrow{BF} - \alpha \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

وبضرب هذه الأخيرة في (-1) نجد $(1-\alpha) \overrightarrow{BF} + \alpha \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ وهذا يعني أن F مرشح الجملة $\{(B, 1-\alpha), (C, \alpha)\}$

(2) $(1-\alpha) \overrightarrow{HA} + (1-\alpha) \overrightarrow{HB} + \alpha \overrightarrow{HC} + \alpha \overrightarrow{HD} = [(1-\alpha) \overrightarrow{HA} + \alpha \overrightarrow{HD}] + [(1-\alpha) \overrightarrow{HB} + \alpha \overrightarrow{HC}]$
 $= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HF} = \vec{0}$

إذن H هي مرشح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)\}$

(ب) I هي مرشح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha)\}$ و J مرشح $\{(C, \alpha), (D, \alpha)\}$ حسب خاصية التجميع فإن H هي مرشح $\{(I, 2-2\alpha), (J, 2\alpha)\}$ إذن النقط I, J, H على استقامة واحدة.

تطبيق 2

تعيين مجموعة النقط

A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء.

(1) عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = AB$

(2) عين مجموعة النقط من الفضاء بحيث $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \frac{3}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

الحل

(1) لتكن G مرشح الجملة $\{(A, 1), (B, -2)\}$ تحقق $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{MG}$$

المساواة $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = AB$ تكافئ $MG = AB$

ومنه مجموعة النقط المطلوبة هي سطح كرة مركزها G وطول نصف قطرها $r = AB$
(2) لتكن I منتصف $[AB]$ و G_1 مرشح الجملة $\{(A, 1), (B, 2)\}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG_1}$$

المساواة $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \frac{3}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ تكافئ $3MG_1 = \frac{3}{2} \times 2MI$

أي $MG_1 = MI$

إذن مجموعة النقط M هي المستوي المحوري للقطعة $[G_1I]$

تطبيق 3

إثبات أن أربع نقط من نفس المستوي

$ABCD$ رباعي وجوه، K نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$

و L نقطة من القطعة $[CD]$ بحيث $\overrightarrow{CL} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CD}$

I و J منتصفا $[AD]$ و $[BC]$ على الترتيب.

G مرشح الجملة $\{(A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$

(أ) بين أن النقط L, K, G على استقامة واحدة.

(ب) بين أن النقط I, J, G على استقامة واحدة.

(ج) استنتج أن النقط L, K, J, I من نفس المستوي.

✓ الحل

(1) المساواة $\vec{AK} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ تكتب $\vec{AK} = \frac{1}{4} (\vec{AK} + \vec{KB})$ بالتبسيط نجد $3 \vec{KA} + \vec{KB} = \vec{0}$

وهذا يعني أن K مرجح الجملة $\{(A, 3), (B, 1)\}$

المساواة $\vec{LC} + 3 \vec{LD} = \vec{0}$ تكتب $\vec{CL} = \frac{3}{4} (\vec{CL} + \vec{LD})$ بالتبسيط نجد $\vec{LC} + 3 \vec{LD} = \vec{0}$

وهذا يعني أن L مرجح الجملة $\{(C, 1), (D, 3)\}$

إذن G هي مرجح الجملة $\{(K, 4), (L, 4)\}$ أي G منتصف $[KL]$

وعليه النقطة G, L, K على استقامة واحدة.

(ب) I مرجح الجملة $\{(A, 3), (D, 3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B, 1), (C, 1)\}$

وحسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(J, 2), (I, 6)\}$

وهذا يعني أن النقطة G, J, I تقع على استقامة واحدة.

(ج) بما أن G, I, J على استقامة واحدة فإن G تنتمي إلى المستقيم (IJ)

بما أن G, K, L على استقامة واحدة فإن G تنتمي إلى المستقيم (KL)

إذن G تنتمي إلى تقاطع (IJ) و (KL) الغير متوازيين

وعليه فإن G تنتمي إلى المستوي المحدد بالمستقيمين (IJ) و (KL)

وبالتالي النقطة I, J, K, L من نفس المستوي.

تطبيق 4 حساب المسافة بين نقطة ومستوي

4 تطبيق

المكعب حرفه 1.

(1) بسط عبارة الشعاع $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$ ثم استنتج أن $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$

(ب) أثبت أن $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$

(ج) بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BDE) .

(2) I مركز ثقل المثلث BDE استنتج من السؤال 1-أ أن النقطة I هي نقطة تقاطع للمستقيم (AG) والمستوي (BDE) ثم عين موضعها على القطعة $[AG]$.

(3) نزود القضاء بمعلم متعامد ومتجانس

$(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

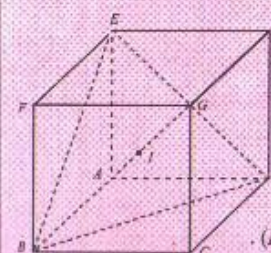
(أ) اكتب معادلة للمستوي (BDE) .

(ب) اعط تمثيلاً وسمطياً للمستقيم (d)

الارمن H والعمودي على المستوي (BDE)

(ج) أو حد إحداثيات J تقاطع (d) مع (BDE)

(د) استنتج مسافة النقطة H عن المستوي (BDE) .



✓ الحل

(1) $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AG} + \vec{GC} + \vec{AE}$

$= \vec{AG} + \vec{0} = \vec{AG}$

$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}) \cdot \vec{BD}$

$= \vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{AD} \cdot \vec{BD} + \vec{AE} \cdot \vec{BD}$

$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

(ب) $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AE})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{BA} + \vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AD} \cdot \vec{AE} + \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AE} \cdot \vec{BA} + \vec{AE} \cdot \vec{AE}$

$= -\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{AE} \cdot \vec{AE}$

$= -\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AE} \cdot \vec{AE} = -1 + 1 = 0$

(ج) من المساواة $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$ نستنتج أن (AG) عمودي على (BD)

ومن المساواة $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$ نستنتج أن (AG) عمودي على (BE)

وبما أن (BE) و (BD) متقاطعان فإن (AG) عمودي على المستوي الذي يشملهما

أي (AG) عمودي على المستوي (BDE) .

(2) من السؤال 1 لدينا $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

$\vec{AG} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} + \vec{ID} + \vec{AI} + \vec{IE}$

$\vec{AG} = 3 \vec{AI} + (\vec{IB} + \vec{ID} + \vec{IE})$

$\vec{AG} = 3 \vec{AI} + \vec{0} = 3 \vec{AI}$

إذن النقطة G, I, A على استقامة واحدة.

وبالتالي (AI) عمودي على (BDE)

وبما أن I تنتمي إلى (BDE) فإن تقاطع (AG) مع (BDE) هي I

وموضع النقطة I يعطى بـ $\vec{AI} = \frac{1}{3} \vec{AG}$

لدينا في العلم السابق $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$ ، $G(1,1,1)$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوي (BDE)

\vec{AG} شعاع ناظم للمستوي (BDE)

المستوي (BDE) هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ بحيث $\vec{BM} \cdot \vec{AG} = 0$ (1)

$\vec{BM}(x-1, y, z)$ ، $\vec{AG}(1, 1, 1)$

المساواة (1) تكافئ: $x-1+y+z=0$

إذن معادلة المستوى (BDE) هي $x+y+z-1=0$

(ب) $H(0, 1, 1)$

شعاع توجيه d هو $\vec{AG}(1,1,1)$

التمثيل الوسيطى للمستقيم d هو $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

(ج) إحداثيات النقطة J هي حل للجملة (S) $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+t \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$

نعوض عبارة كل من x, y, z في معادلة المستوى نجد:

$t + (1+t) + (1+t) - 1 = 0$ ومنه نجد $t = -\frac{1}{3}$ ثم نعوض قيمة t في عبارة x, y, z نجد:

$x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$ إذن $J(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

(د) بما أن d يقطع المستوى (BDE) في J والنقطة H تنتمي إلى d فإن J هي مسقط H

على (BDE) وبالتالي المسافة بين H و (BDE) هي JH

$$JH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

تطبيق 5

تعيين صحة أو خطأ قضية معلومة

R, Q, P ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوى. I مرجح $\{(R, -3), (Q, 2)\}$ و J مرجح $\{(R, -3), (P, 1)\}$ و K مرجح $\{(Q, 1), (P, m)\}$ مع m عدد حقيقي يختلف عن -1 هل المعطيات الآتية صحيحة أم خاطئة؟

$$\vec{PI} = 2\vec{QP} - 3\vec{RP} \quad (1)$$

$$\vec{PI} = 2\vec{QJ} \quad (2)$$

(3) المستقيم (PI) يوازي المستقيم (QJ)

(4) توجد قيمة وحيدة للعدد m بحيث أن المستقيم (PI) يوازي (RK)

(5) من أجل $m = \frac{1}{2}$ فإن المستقيمين (PI) و (QJ) يوازيان (RK)

✓ الحل

$$(1) \text{ I مرجح } (R, -3), (Q, 2) \text{ يعني } \vec{IR} + 2\vec{IQ} = \vec{0}$$

$$-3(\vec{IP} + \vec{PR}) + 2(\vec{IP} + \vec{PQ}) = \vec{0}$$

$$-3\vec{IP} - 3\vec{PR} + 2\vec{IP} + 2\vec{PQ} = \vec{0}$$

إذن المعلومة الأولى صحيحة $\vec{PI} = 3\vec{PR} - 2\vec{PQ} = 2\vec{QP} - 3\vec{RP}$

$$\vec{PI} = 2(\vec{QJ} + \vec{JP}) - 3(\vec{RJ} + \vec{JP}) \quad (2)$$

$$= 2\vec{QJ} + 2\vec{JP} - 3\vec{RJ} - 3\vec{JP}$$

$$= 2\vec{QJ} + (-\vec{JP} - 3\vec{RJ})$$

$$= 2\vec{QJ} + (-\vec{JP} - 3\vec{RJ}) = 2\vec{QJ} - (\vec{JP} - 3\vec{JR}) = 2\vec{QJ}$$

ومنه المعلومة (2) صحيحة

(3) بما أن \vec{PI} و \vec{QJ} مرتبطان خطياً فإن (PI) يوازي (QJ)

(4) K مرجح (P, m) و $(Q, 1)$ يعني $\vec{KQ} + m\vec{KP} = \vec{0}$

$$\vec{PI} = 2\vec{QP} - 3\vec{RP}$$

$$\vec{PI} = 2\vec{QK} + 2\vec{KP} - 3\vec{RK} - 3\vec{KP}$$

$$\vec{PI} = -3\vec{RK} + (-\vec{KP} + 2\vec{QK})$$

حتى يكون (PI) يوازي (RK) يجب أن يكون:

$$-\vec{KP} + 2\vec{QK} = \vec{0} \text{ أي } -\vec{KP} - 2\vec{KQ} = \vec{0}$$

$$\vec{KQ} + \frac{1}{2}\vec{KP} = \vec{0} \text{ نجد } -2$$

ومنه توجد قيمة وحيدة للعدد m تجعل (PI) و (RK) متوازيان هي $\frac{1}{2}$

(5) من أجل $m = \frac{1}{2}$ يكون (PI) يوازي (RK) وبما أن (PI) يوازي (QJ)

فإن (PI) و (QJ) يوازيان (RK).

تطبيق 6

تعيين التمثيل الوسيطى لمستقيم

ABCD رباعي وجوه، t عدد حقيقي يختلف عن -4

و m مرجح الجملة $\{(D, 1), (C, 1), (B, 2), (A, t)\}$

I و J منتصفا $[BI]$ و $[CD]$ على التوالي.

(1) نعتبر العلم $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

(2) عين إحداثيتي النقطتين m و J

(ج) لكي نثبت أن J, M, A على استقامة واحدة يجب أن نثبت أن M تنتمي إلى (AJ) .
 M تنتمي إلى (AJ) هذا يعني وجود عدد حقيقي s وحيد حيث أن إحداثيات M تحقق
 الجملة (S).

$$\begin{cases} s = \frac{4}{t+4} \\ s = \frac{4}{t+4} \\ s = \frac{4}{t+4} \end{cases} \quad \text{ومن هنا ينتج} \quad \begin{cases} \frac{2}{t+4} = \frac{1}{2}s \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{t+4} = \frac{1}{4}s \dots\dots\dots (2) \\ \frac{1}{t+4} = \frac{1}{4}s \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad \text{أي}$$

إذن $s = \frac{4}{t+4}$ تحقق المعادلات (1) و (2) و (3) في آن واحد.

إذن النقطة M تنتمي إلى (AJ) وهذا يعني أن J, M, A تقع على استقامة واحدة.

• إيجاد العلاقة بين \vec{AJ} و \vec{AM}

$$\vec{AM} = \frac{2}{t+4} \vec{AB} + \frac{1}{t+4} \vec{AC} + \frac{1}{t+4} \vec{AD} = \frac{4}{t+4} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AD} \right) = \frac{4}{t+4} \vec{AJ}$$

إذن $\lambda = \frac{4}{t+4}$

(2) J منتصف $[BI]$ يعني $\vec{JB} + \vec{JI} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} t \vec{MA} + 2 \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} &= \vec{0} \\ t \vec{MA} + 2 \vec{MJ} + 2 \vec{JB} + \vec{MJ} + \vec{JC} + \vec{MJ} + \vec{JD} &= \vec{0} \\ t \vec{MA} + 4 \vec{MJ} + (2 \vec{JB} + \vec{JC} + \vec{JD}) &= \vec{0} \\ t \vec{MA} + 4 \vec{MA} + 4 \vec{AJ} + (2 \vec{JB} + \vec{JC} + \vec{JD}) &= \vec{0} \\ -(t+4) \vec{AM} + 4 \vec{AJ} + (2 \vec{JB} + \vec{JC} + \vec{JD}) &= \vec{0} \\ -(t+4) \vec{AM} + (t+4) \vec{AM} + (2 \vec{JB} + \vec{JC} + \vec{JD}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$2 \vec{JB} + \vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0} \quad \text{ومن هنا}$$

إذن J مرجح الجملة $\{(B, 2), (C, 1), (D, 1)\}$

• بما أن I هي مرجح الجملة $\{(C, 1), (D, 1)\}$ و J مرجح $\{(B, 2), (I, 2)\}$

فإن J مرجح الجملة $\{(B, 2), (C, 1), (D, 1)\}$ (حسب خاصية التجميع).

تطبيق 7 إثبات الاستقامية

D, C, B, A أربع نقاط من الفضاء.

I و J منتصفا $[CD]$ و $[AB]$ على التوالي، E نقطة بحيث $\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AD}$ و F

(ب) اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AJ)

(ج) بين أن النقط J, M, A على استقامة واحدة ثم حدد معامل التناسب

بين الشعاعين \vec{AJ} و \vec{AM} .

(2) عبر عن J كمزيج للنقط D, C, B ثم أوجد هذه النتيجة باستعمال خاصية التجميع.

✓ الحل

$$t \vec{MA} + 2 \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0} \quad (1)$$

$$t \vec{MA} + 2 \vec{MA} + 2 \vec{AB} + \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{MA} + \vec{AD} = \vec{0}$$

$$\vec{MA} (t+2+2) + 2 \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$$

$$(t+4) \vec{AM} = 2 \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$$

$$\vec{AM} = \frac{2}{t+4} \vec{AB} + \frac{1}{t+4} \vec{AC} + \frac{1}{t+4} \vec{AD}$$

ومن هنا إحداثيات M هي $\left(\frac{2}{t+4}, \frac{1}{t+4}, \frac{1}{t+4} \right)$

I منتصف $[CD]$ يعني $\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

$$2 \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0} \quad \text{ومن هنا} \quad \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{IA} + \vec{AD} = \vec{0}$$

$$\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AD} \quad \text{ومن هنا ينتج}$$

$$I \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

بما أن J منتصف $[BI]$ فإن $\vec{JB} + \vec{JI} = \vec{0}$

$$\vec{JA} + \vec{AB} + \vec{JA} + \vec{AI} = \vec{0}$$

$$2 \vec{JA} + \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AD} = \vec{0}$$

$$\vec{AJ} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AD} \quad \text{إذن} \quad J \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

(ب) $\vec{AJ} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$ هو شعاع توجيه المستقيم (AJ) .

$$\text{التمثيل الوسيطى للمستقيم (AJ) هو} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}s \\ y = \frac{1}{4}s \\ z = \frac{1}{4}s \end{cases} \quad \text{مع } s \in \mathbb{R} \quad (S) \dots\dots\dots$$

نقطة بحيث $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ و K منتصف $[EF]$
بين أن النقط I, J, K على استقامة واحدة.

✓ الحل

$$\text{المساواة } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED} \text{ ومنه } 3 \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} \text{ تكتب } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

$$\text{أي } \overrightarrow{2EA} + \overrightarrow{ED} = \vec{0} \text{ وبالتالي } E \text{ مرجح النقطتين } (A, 2), (D, 1)$$

$$\text{المساواة } \overrightarrow{2BF} = \overrightarrow{FC} \text{ ومنه } 3 \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} \text{ تكتب } \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$$

$$\text{أي } \overrightarrow{2FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \text{ وبالتالي } F \text{ مرجح النقطتين } (B, 2), (C, 1)$$

- مرجح النقط $(A, 2), (D, 1), (B, 2), (C, 1)$ هو مرجح النقطتين $(E, 3), (F, 3)$ أي منتصف $[EF]$.

إذن مرجح النقط $(A, 2), (D, 1), (B, 2), (C, 1)$ هو K .

مرجح النقط $(A, 2), (D, 1), (B, 2), (C, 1)$ هو مرجح $(I, 4), (J, 2)$.

إذن K ينتمي إلى (IJ) وعليه النقط I, J, K على استقامة واحدة.

تطبيق 8

إثبات تقاطع مستقيمين في الفضاء

$ABCDE$ هرم قاعدته $BCDE$ متوازية الأضلاع ومركزها النقطة O .
ولكن G مركز ثقل المثلث ABC و G' مركز ثقل المثلث ADE .
بين أن (OA) و (GG') متقاطعان.

✓ الحل

G مرجح النقط $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$

G' مرجح النقط $(A, 1), (D, 1), (E, 1)$

إذن مرجح النقط $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 1)$ هو مرجح النقطتين

$(G, 3), (G', 3)$ أي هو منتصف $[GG']$ وليكن I .

إذن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (GG') .

$$\text{لدينا } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

$$5 \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

$$5 \overrightarrow{IO} + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA} = 5 \overrightarrow{OI} \text{ ومنه نجد } \overrightarrow{IO} + \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$$

هنا معناه أن النقطة I تنتمي إلى (OA) وبالتالي المستقيمين (OA) و (GG') متقاطعان.

تطبيق 9

إثبات انتماء أربع نقط إلى مستوي

نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ، ولنكن النقط I, J, K, L معرفة بالكيفية التالية:
 I و K منتصف $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي،

$$\text{و } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

ولنكن G مرجح النقط $(A, 3), (B, 3), (C, 1), (D, 1)$

(1) عين مرجح الجملة $\{(A, 3), (D, 1)\}$ ومرجح الجملة $\{(C, 1), (B, 3)\}$

(2) بتجميع النقط A, B, C, D بطريقتين مختلفتين، بين أن ينتمي إلى (IK) و (JL) ، ثم استنتج أن I, J, K, L تقع في نفس المستوي.

✓ الحل

(1) - النقطة M_1 مرجح الجملة $\{(A, 3), (D, 1)\}$ يعني $3 \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1D} = \vec{0}$

$$3 \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1D} = 3 \overrightarrow{M_1L} + 3 \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{M_1L} + \overrightarrow{LD} = 4 \overrightarrow{M_1L} + 3 \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AD} = 4 \overrightarrow{M_1L} + 4 \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AD} = 4 \overrightarrow{M_1L} + 4 \overrightarrow{LA} + 4 \overrightarrow{AL} = 4 \overrightarrow{M_1L}$$

لكن $3 \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1D} = \vec{0}$ إذن $4 \overrightarrow{M_1L} = \vec{0}$ ومنه M_1 منطبقة على L .

وبالتالي مرجح الجملة $\{(A, 3), (D, 1)\}$ هو L .

- النقطة M_2 مرجح الجملة $\{(C, 1), (B, 3)\}$ يعني $\overrightarrow{M_2C} + 3 \overrightarrow{M_2B} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{M_2C} + 3 \overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{M_2J} + \overrightarrow{JC} + 3 \overrightarrow{M_2J} + 3 \overrightarrow{JB} = 4 \overrightarrow{M_2J} + \overrightarrow{JC} + 3 \overrightarrow{JB} = 4 \overrightarrow{M_2J} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC} + 3 \overrightarrow{JB} = 4 \overrightarrow{M_2J} + 4 \overrightarrow{JB} + 4 \overrightarrow{BJ} = 4 \overrightarrow{M_2J}$$

وبما أن $\overrightarrow{M_2C} + 3 \overrightarrow{M_2B} = \vec{0}$ فإن $4 \overrightarrow{M_2J} = \vec{0}$ وهذا يعني أن M_2 منطبقة على J .

إذن مرجح الجملة $\{(C, 1), (B, 3)\}$ هو J .

(2) - مرجح $(A, 3), (D, 1)$ هو L ومرجح $(C, 1), (B, 3)$ هو J .

إذن مرجح $(A, 3), (D, 1), (C, 1), (B, 3)$ هو مرجح النقطتين $(J, 4), (L, 4)$ أي منتصف $[LJ]$

- مرجح $(A, 3), (B, 3)$ هو $(I, 2)$ ومرجح $(C, 1), (D, 1)$ هو $(K, 2)$

ومنه مرجح $(A, 3), (B, 3), (C, 1), (D, 1)$ هو منتصف $[IK]$.

إذن مرجح $(A, 3), (B, 3), (C, 1), (D, 1)$ ينتمي إلى (LJ) وينتمي إلى (IK) فهو إذن

ينتمي إلى تقاطع (IK) و (LJ) وعليه فإن المستقيمين (IK) و (LJ) متقاطعان في G .
وبما أن المستقيمين (IK) و (LJ) متقاطعان فإن النقط I, K, J, L تنتمي إلى نفس المستوى.

تطبيق 10

تحديد مجموعة النقط

1- ثلاث نقط A, B, C ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة، و k عدد حقيقي من $[-1, 1]$

لتكن G_k مرجح الجملة $\{(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)\}$

(1) مثل النقط A, B, C و I منتصف $[BC]$ ثم انشئ G_1 و G_{-1}

(2-1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $k \in [-1, 1]$ يكون $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2} \overrightarrow{BC}$

(ب) اعط جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1, 1]$ بـ $f(x) = \frac{-x}{1+x^2}$

(ج) استنتج مجموعة النقط G_k لـ k يسمح المجال $[-1, 1]$

(3) حدد (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث:

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

(4) حدد (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث:

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

(5) نرود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ولتكن إحداثيات النقط

A, B, C في هذا العلم هي $(-1, 2, 5), (-1, 2, 1), (0, 0, 2)$ على التوالي.

النقطة G_k والمجموعتان (γ) و (Γ) معرفتان كما في السابق.

(أ) عين إحداثيات G_1 و G_{-1} . ثم بين أن (γ) و (Γ) متقاطعتان.

(ب) عين نصف قطر الدائرة (C) الناتجة من تقاطع المجموعتين (γ) و (Γ) .

✓ الحل

(1) - بما أن النقطة G_1 مرجح $(A, 2), (B, 1), (C, -1)$ فإن $2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

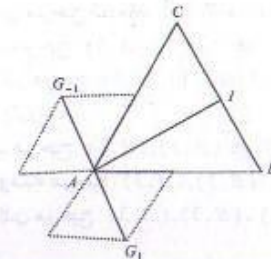
$$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ ومنه } 2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

- بما أن G_{-1} مرجح $(A, 2), (B, -1), (C, 1)$ فإن:

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} + \overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$



$$2\overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ ومنه}$$

(2) G_k مرجح النقط $(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{G_kA} - k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} = -(k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}) = -k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC} \text{ ومنه نجد}$$

$$f'(x) = \frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \text{ (ب)}$$

من أجل كل x من $[-1, 1]$ يكون $f'(x) < 0$

ومنه f متناقضة تماماً على $[-1, 1]$

(ج) لـ k يسمح $[-1, 1]$ فإن $f(k)$ يسمح المجال

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

إذن $\overrightarrow{AG_k} = \lambda \overrightarrow{BC}$ مع λ يسمح المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

وعليه مجموعة النقط G_k لـ k يسمح $[-1, 1]$ هي القطعة $[G_{-1}, G_1]$

(3) من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1} \text{ و } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_{-1}}$$

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_{-1}}\| \text{ تكافئ } \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

أي $MG_1 = MG_{-1}$ ومنه مجموعة النقط (γ) هي المستوي الحوري للقطعة المستقيمة $[G_{-1}, G_1]$

(4) من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا:

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AI}$$

$$\text{للساواة } \|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{AI}\| \text{ تكافئ } \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

$$MG_1 = AI$$

إذن مجموعة النقط Γ هي سطح كرة مركزها G_1 وطول نصف قطرها AI

(5) (أ) لتكن (x_0, y_0, z_0) إحداثيات G_1 و (x_1, y_1, z_1) إحداثيات G_{-1}

$$x_0 = \frac{2x_A + x_B - x_C}{2} = \frac{0-1+1}{2} = 0$$

$$y_0 = \frac{2y_A + y_B - y_C}{2} = \frac{0+2-2}{2} = 0$$

$$G_1(0,0,0) \text{ إذن } z_0 = \frac{2z_A + z_B - z_C}{2} = \frac{4+1-5}{2} = 0$$

بنفس الطريقة نجد $G_{-1}(0,0,4)$

- المستوى المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$ ناضله هو الشعاع $\vec{G_{-1}G_1}$ ويبر بالقطعة A منتصف $[G_{-1}G_1]$

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من هذا المستوى فإنها تحقق،

$$\vec{EM} \cdot \vec{G_{-1}G_1} = 0 \text{ حيث } E \text{ منتصف } [G_1G_{-1}]$$

$$\vec{EM}(x,y,z-2) \cdot \vec{G_{-1}G_1}(0,0,-4) = 0$$

$$\text{المساواة } \vec{EM} \cdot \vec{G_{-1}G_1} = 0 \text{ تكافئ } -4(z-2) = 0 \text{ أي } -4z+8=0$$

$$\frac{|4 \times 0 - 8|}{\sqrt{4^2}} = \frac{8}{4} = 2 \text{ هي } [G_{-1}G_1] \text{ المسافة بين } G_1 \text{ والمستوي المحوري لـ } [G_{-1}G_1]$$

ونصف قطر سطح الكرة يساوي $AI = \sqrt{(-1)^2 + (2-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$
بما أن المسافة بين G_1 والمستوي المحوري لـ $[G_{-1}G_1]$ أصغر من نصف قطر سطح الكرة فإن هذا المستوى يقطعها في دائرة.

(ب) معادلة سطح الكرة هي $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = 2 \end{cases} \text{ الدائرة الناتجة من التقاطع تحقق}$$

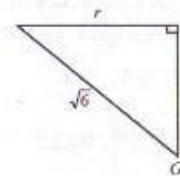
وبالتالي معادلتها هي $x^2 + y^2 = 2$

إذن نصف قطر هذه الدائرة هو $r = \sqrt{2}$

طريقة ثانية لحساب نصف القطر،

حسب نظرية فيثاغورث لدينا $r^2 + 4 = 6$ ومنه $r^2 = 2$

إذن $r = \sqrt{2}$



تطبيق 11 إثبات تقاطع مستقيمين في الفضاء

لتكن النقط A, B, C, D ليست من نفس المستوي α, β عدنان حقيقيان.
لتكن I مرجح (A, α) ، $(B, 1-\alpha)$ ، و J مرجح (C, α) و $(D, 1-\alpha)$
و K مرجح (A, β) ، $(C, 1-\beta)$ ، و L مرجح (B, β) و $(D, 1-\beta)$
بين أن المستقيمين (IJ) و (KL) متقاطعان.

الحل

- بما أن I مرجح (A, α) ، $(B, 1-\alpha)$ فهي إذن مرجح $(B, (1-\alpha)\beta)$ ، $(A, \alpha\beta)$
- بما أن J مرجح (C, α) و $(D, 1-\alpha)$ فهي إذن مرجح $(D, (1-\alpha)\beta)$ ، $(C, \alpha(1-\beta))$
إذن M مرجح $(A, \alpha\beta)$ ، $(B, (1-\alpha)\beta)$ ، $(C, \alpha(1-\beta))$ ، $(D, (1-\alpha)(1-\beta))$
هو مرجح النقطتين I و J .

- بما أن K مرجح (A, β) ، $(C, 1-\beta)$ فهو إذن مرجح $(C, \alpha(1-\beta))$ ، $(A, \alpha\beta)$
- بما أن L مرجح (B, β) ، $(D, 1-\beta)$ فهو مرجح $(D, (1-\alpha)(1-\beta))$ ، $(B, (1-\alpha)\beta)$
إذن M مرجح $(A, \alpha\beta)$ ، $(B, (1-\alpha)\beta)$ ، $(C, \alpha(1-\beta))$ ، $(D, (1-\alpha)(1-\beta))$
هو أيضا مرجح النقطتين K و L

ومنه ينتج أن M تنتمي إلى المستقيمين (IJ) و (KL)

إذن المستقيمان (IJ) و (KL) متقاطعان في النقطة M .

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

تطبيق 12

ليكن المستقيمان d_1, d_2 من مستوي (P) متقاطعين في نقطة O .
وليكن d مستقيما من الفضاء يقطع (P) في نقطة وحيدة A بحيث،
 $A \notin d_1$ و $A \notin d_2$ ولتكن M نقطة أخرى من d مختلفة عن A
(1) ليكن (P_1) المستوي للار من M ويشمل d_1 و (P_2) المستوي للار من M ويشمل d_2
من M ويشمل d_3 عين تقاطع (P_1) و (P_2) ولتكن (I) هذه المجموعة؟
(2) بين أنه لا تسمح d فإن (I) محتواة في مستوي ثابت يطلب تعيينه.

الحل

(1) لدينا $d_1 = (P) \cap d_1$ و $d_2 = (P) \cap d_2$ (1)

لدينا $d \cap (P_1) = M$ و $d \cap (P_2) = M$ (2)

من (1) نستنتج أن،

$$(P) \cap (P_1) \cap (P_2) = [(P) \cap (P_1)] \cap [(P_2) \cap (P)] = d_1 \cap d_2 = \{O\} \text{ (I)}$$

$$(P) \cap (P_1) \cap d = [(P) \cap d] \cap [(P_1) \cap d] = \{M\} \text{ (II)}$$

من (I) نستنتج أن O تنتمي إلى (P_1) و (P_2) ومن (II) نستنتج أن M تنتمي إلى (P_1) و (P_2)

إذن (OM) محتوى في $(P_1) \cap (P_2)$

نعلم أن $(P_1) \cap (P_2)$ إما أن يكون خاليا أو مستقيما أو (P_1)

- بما أن O تنتمي إلى $(P_1) \cap (P_2)$ فإن هذا التقاطع غير خال.

- بما أن (P) لا يشمل d_2 فإن (P_1) و (P_2) غير منطبقين

وبالتالي $(P_1) \cap (P_2) = (OM) = (I)$

(2) لا تسمح d فإن المستقيم (OM) يقطع d ويقطع (OA) دائما.

وبالتالي المجموعة I محتواة في المستوي الذي يشمل المستقيمين المتقاطعين d و (OA) .

تطبيق 13

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

- ليكن d مستقيماً ماراً بالنقطة $A(1, 2, -4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1, 2, 3)$
- اعط تمثيلاً وسيطياً لـ d
 - هل النقط $B(2, 4, -1)$ ، $C(3, 6, -2)$ ، $D(-2, -4, -13)$ تنتمي إلى d ؟
 - هل توجد نقطة من d فاصلتها 4 نقطة ترتيبها 10 نقطة ارتفاعها 3؟
 - أوجد تقاطع d مع المستويات (XOY) ، (XOZ) و (YOZ)
 - حدد تقاطع d مع المحاور الثلاثة للمعلم المتعامد والتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

الحل

(1) التمثيل الوسيط للمستقيم d هو $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

(2) B تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 2=1+t \\ 4=2+2t \\ -1=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=1$

بما أنه توجد قيمة وحيدة لـ t فإن النقطة B تنتمي إلى d

C تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 3=1+t \\ 6=2+2t \\ -2=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=2$

قيمة t ليست وحيدة ومنه C لا تنتمي إلى d

D تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} -2=1+t \\ -4=2+2t \\ -13=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=-3$

ومنه توجد قيمة وحيدة لـ t .

إذن النقطة D تنتمي إلى المستقيم d .

(3) لكن M_1 نقطة فاصلتها 4.

M_1 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 4=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=3 \\ y=8 \\ z=5 \end{cases}$

إذن $M_1(4, 8, 5)$

لكن M_2 نقطة ترتيبها 4.

M_2 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} x=1+t \\ 10=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=5 \\ t=4 \\ z=8 \end{cases}$

إذن $M_2(5, 10, 8)$

لكن M_3 نقطة ارتفاعها 3.

M_3 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=\frac{7}{3} \\ x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{20}{3} \end{cases}$

إذن $M_3(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{7}{3})$

(4) تقاطع (d) مع (XOY) هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} z=0 \\ t=\frac{4}{3} \\ x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{14}{3} \end{cases}$

إذن نقطة تقاطع (d) مع (XOY) هي $M_4(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}, 0)$

بنفس الطريقة نجد تقاطع (d) مع (XOZ) وهي النقطة $M_5(0, 0, -7)$

وتقاطع (d) مع (YOZ) هي النقطة $M_6(0, 0, -7)$

(5) تقاطع (d) مع $(x'x')$ هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ y=0 \text{ و } z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$

إذن لا توجد قيمة وحيدة لـ t وبالتالي d لا يقطع $(x'x')$.

- تقاطع (d) مع $(y'y')$ هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ x=0 \text{ و } z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$

إذن لا توجد قيمة وحيدة لـ t وبالتالي d لا يقطع $(y'y')$.

- تقاطع d مع $(z'z')$ هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t=0 \\ y=2+2t=0 \\ z=-4+3t \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $t=-1$ ، $y=0$ ، $x=0$

إذن d يقطع $(z'z')$ في $(0, 0, -7)$

تطبيق 14

دراسة الوضع النسبي لمستقيمين

$$\begin{cases} x=4+3t \\ y=-2+t \\ z=1-5t \end{cases} \text{ مع } t \in \mathbb{R}$$

- (1) هل النقطتان $A(-2, -4, 13)$ ، $B(7, -1, -4)$ تنتميان إلى d ؟
 (2) هل للمستقيم d يوازي (AC) حيث $C(-8, -6, 23)$ ؟
 (3) هل للمستقيم d عمودي على (BD) حيث $D(9, 2, -2)$ ؟

الحل

(1) النقطة A تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} -2=4+3t \\ -4=-2+t \\ 13=1-5t \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-2 \\ t=-\frac{12}{5} \end{cases}$

t ليس وحيدا وبالتالي A لا ينتمي إلى d .

النقطة B تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 7=4+3t \\ -1=-2+t \\ -4=1-5t \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=1$

t وحيدا وبالتالي B تنتمي إلى d .

- (2) شعاع توجيه d هو $\vec{u}(3, 1, -5)$ وشعاع توجيه (AC) هو $\vec{AC}(-6, -2, 10)$
 بما أن $\vec{AC} = -2\vec{u}$ فإن الشعاعين \vec{AC} و \vec{u} مرتبطان خطيا مما يعني أن d و (AC) متوازيان.

- (3) مركبات الشعاع \vec{BD} هي $(2, 3, 2)$

$$\vec{BD} \cdot \vec{u} = 2 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times (-5) = -1$$

بما أن $\vec{BD} \cdot \vec{u} \neq 0$ فإن d ليس عموديا على (BD)

تطبيق 15

الوضع النسبي لمستويين

ليكن d' و d مستقيمين علما أن تمثيليهما الوسيطيين هما :

$$\begin{cases} x=8-s \\ y=2s \\ z=1-s \end{cases} \text{ ، } s \in \mathbb{R} \quad \text{ ، } \quad \begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases} \text{ ، } t \in \mathbb{R}$$

- (1) بين أن هذين المستقيمين غير متوازيين
 (2) عين تقاطع هذين المستقيمين.

الحل

- (1) ليكن \vec{v} ، \vec{u} شعاعي توجيه d' و d على التوالي حيث $\vec{v}(-1, 2, -1)$ ، $\vec{u}(-2, -2, 1)$
 بما أن \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطيا فإن d' و d غير متوازيين.

(2) $M(x, y, z)$ تنتمي إلى $d \cap d'$ يعني أن $\begin{cases} 1-2t=8-s \dots (1) \\ 2-2t=2s \dots (2) \\ t=1-s \dots (3) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $-1=8-3s$ ومنه $s=3$

وبتعويض قيمة s في المعادلة (3) نجد $t=-2$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطى للمستقيم d نجد $x=5$ ، $y=6$ ، $z=-2$
 إذن نقطة التقاطع هي $(5, 6, -2)$.

تطبيق 16

تعيين معادلة مستوي المعرف بمستقيمين

d' و d مستقيمان علما أن تمثيليهما الوسيطيين هما :

$$\begin{cases} x=3+s \\ y=2-2s \\ z=m+2s \end{cases} \quad \text{ و } \quad \begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$$

حيث m وسيط حقيقي.

(1) ادرس حسب قيم m تقاطع d' و d .

(2) من أجل $m=-4$ اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) المعين بـ d' و d .

الحل

$$\begin{cases} x=3+s \\ y=2-2s \\ z=m+2s \end{cases} \quad \text{ و } \quad \begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$$

ليكن \vec{v} و \vec{u} شعاعي توجيه d' و d حيث $\vec{v}(1, -2, 2)$ ، $\vec{u}(1, -1, 1)$
 بما أن \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطيا فإن d' و d غير متوازيين

- إحداثيات نقطة التقاطع إن وجدت تحقق $\begin{cases} 1+t=3+s \dots (1) \\ 3-t=2-2s \dots (2) \\ -1+t=m+2s \dots (3) \end{cases}$

من (1) نجد $t=2+s$ نعوضها في (2) نجد $3-2-s=2-2s$

ومنه $s=1$ وبالتالي $t=3$

نعوض t و s في (3) نجد $-2=m+2$ ومنه $m=-4$

إذن إذا كان $m=-4$ فإن d يقطع d' في النقطة $A(4, 0, -2)$

وإذا كان $m \neq -4$ فإن d لا يقطع d' .

(2) من أجل $m = -4$ فإن d و d' متقاطعان في A

المستوي (P) الذي يشملهما يكون شعاعي توجيههما \vec{u} و \vec{v} معادلته تكون من الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

ناظم المستوي (P) هو $\vec{n}(a, b, c)$ ويحقق $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ تكافئ } a - b + c = 0 \text{ (1)}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \text{ تكافئ } a - 2b + 2c = 0 \text{ (2)}$$

$$A(4, 0, -2) \text{ تنتمي إلى } (P) \text{ تكافئ } 4a - 2c + d = 0 \text{ (3)}$$

ب طرح (2) من (1) نجد $b - c = 0$ ومنه $b = c$

نعوض b في (1) نجد $a = 0$ ونعوض a في (3) نجد $d = 2c$

بما أن $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ فإن $c \neq 0$

إذن معادلة (P) هي $cy + cz + 2c = 0$ وبالقسمة على c نجد $y + z + 2 = 0$

تطبيق 17

حساب المسافة بين نقطة ومستقيم بطريقتين

لتكن d و $A(0, 1, 3)$ مستقيم تمثيله الوسيط $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

(1) لتكن δ المسافة الأصغر بين النقطة A والنقطة M حيث M تنتمي إلى d

لتكن M نقطة من d ونعرف الدالة f من \mathbb{R} في \mathbb{R} بحيث $f(t) = AM^2$

(أ) عبر عن $f(t)$ بدلالة t .

(ب) من أجل أي قيمة t تكون الدالة f لها قيمة صغرى.

(ج) استنتج δ .

(2) ليكن (P) المستوي المار من A والعمودي على d .

(أ) عين شعاعا نظاميا لـ (P) . (ب) اعط معادلة للمستوي (P) .

(ج) تحقق أن النقطة $B(2, 2, 2)$ تنتمي إلى d ثم احسب المسافة δ_B بين B و (P)

(د) عبر عن δ بدلالة δ_B و AB ، ثم استنتج δ .

✓ الحل

$$(1) \text{ لدينا } f(t) = AM^2 = (2 + 4t - 0)^2 + (2 - 2t - 1)^2 + (2 + 4t - 3)^2 = 36t^2 + 4t + 6$$

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(t) = 72t + 4$

$$f'(t) = 0 \text{ يكافئ } t = -\frac{1}{18}$$

الدالة f لها قيمة صغرى هي $f(-\frac{1}{18})$

$$f(-\frac{1}{18}) = 36(-\frac{1}{18})^2 + 4(-\frac{1}{18}) + 6 = 5.89$$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{18}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		↙ ↘	

(ج) المسافة δ بين A و M هي القيمة الأصغر للدالة \sqrt{f}

$$\text{إذن } \delta = \sqrt{5.89} = 2.43$$

(2) (أ) شعاع توجيه d وهو أيضا شعاع ناظم لـ (P) إذن $\vec{n}(4, -2, 4)$

(ب) لتكن $M(x, y, z)$ نقطة كيفية من (P) تحقق $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ولكن $\vec{AM}(x, y-1, z-3)$

$$\text{إذن } \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ يكافئ } 2x - y + 2z - 5 = 0$$

إذن معادلة (P) هي $2x - y + 2z - 5 = 0$

(ج) النقطة $B(2, 2, 2)$ تنتمي إلى d

$$\text{يعني } \begin{cases} 2 = 2 + 4t \\ 2 = 2 - 2t \\ 2 = 2 + 4t \end{cases} \text{ وبعد حل هذه الجملة نجد } t = 0$$

إذن توجد قيمة وحيدة لـ t وهذا يعني أن B تنتمي إلى d

$$\text{المسافة بين } B \text{ و } (P) \text{ هي } \delta_B = \frac{|2 \times 2 - 2 + 4 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{1}{3}$$

حسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$$\delta^2 + \delta_B^2 = AB^2 \text{ أي } AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$\text{ومنه } \delta^2 = AB^2 - \delta_B^2 = 6 - \frac{1}{9} = \frac{53}{9}$$

$$\text{إذن } \delta = 2.43$$

تطبيق 18

تقاطع مستوي ومستقيم

d و d' مستقيمان علما أن تمثيلهما الوسيط هما :

$$d': \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases} \text{ و } d: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 - k \\ z = -3 + 2k \end{cases} \text{ , } k \in \mathbb{R}$$

(1) بين أن d و d' متقاطعان

(2) عين معادلة المستوي (P) المحدد بـ d و d'

(3) عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم d' المار بالنقطة $A(2, 0, -5)$ وشعاع توجيهه $\vec{w}(1, 2, 4)$

✓ الحل

(1) لدينا $\vec{u}(1, -1, 2)$ و $\vec{v}(-1, 3, -1)$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي.

الشعاعان \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطيا وبالتالي d و d' غير متوازيين

إذن فهما متخالفان (من مستويين مختلفين) وإما متقاطعان ولعرفة ذلك ندرس إمكانيات

$$(s) \begin{cases} 3+k=4-t & \dots\dots (1) \\ 1-k=2+3t & \dots\dots (2) \\ -3+2k=-t & \dots\dots (3) \end{cases}$$

من (3) نجد $t = -2k + 3$ نعوض عبارة t في (1) نجد $3+k = 4+2k-3$ ومنه $k=2$ و $t=-1$

النائية $(t, k) = (-1, 2)$ تحقق (2)

إذن توجد نقطة A_1 مشتركة بين d و d' إحداثياتها $A_1(5, -1, 1)$ ليكن $(P): ax+by+cz+d=0$ مع $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

ناظم (P) هو $\vec{n}(a, b, c)$ إذن $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ و $A_1 \in (P)$

$$(3) \dots\dots a-b+2c=0 \text{ تكافئ } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(4) \dots\dots -a+3b-c=0 \text{ تكافئ } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(5) \dots\dots 5a-b+c+d=0 \text{ تكافئ } A_1 \in (P)$$

بجمع (3) و (4) طرفا إلى طرف نجد $2b+c=0$ ومنه $c=-2b$

نعوض c في (3) نجد $a=5b$

نعوض a و c في (5) نجد $d=-7b$

إذن معادلة (P) هي $5bx+by-2bz-7b=0$

بما أن $b \neq 0$ فإن $(P): 5x+y-2z-7=0$

$$(3) \text{ التمثيل الوسيط لـ } d'' \text{ هو } \begin{cases} x=2+t \\ y=0+2t \\ z=-5+4t \end{cases}$$

بما أن $\vec{n} \cdot \vec{w} = -1$ فإن d'' يقطع (P) في نقطة B إحداثياتها حل للجملة :

$$s' \begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=-5+4t=0 \\ 5x+y-2z-7=0 \end{cases}$$

نعوض x, y, z في معادلة المستوي (P) نجد $5(2+t)+2t-2(-5+4t)-7=0$

بالتبسيط نجد $t=13$

إذن نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم d'' هي $B(15, 26, 47)$

تطبيق 19

تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم

هل جملة المعادلتين البيكاريتيتين التالية تعرف لنا مستقيما في الفضاء :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases} \text{ في حالة نعم عين تمثيلا وسطيا له.}$$

الحل

بما أن $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}$ فإن المستويين ذوا المعادلتين $x+y=0$ و $2x+y-z+1=0$

غير متوازيين وبالتالي فالجملة $(s) \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ تعرف مستقيما d .

$$\text{الجملة (s) تكتب } \begin{cases} y=-x \\ z=x+1 \end{cases} \text{ ويوضع } x=t \text{ الجملة (s') تكتب } \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases}$$

وهذه الأخيرة تمثل تمثيلا وسيطيا لـ d شعاع توجيهه $\vec{w}(1, -1, 1)$ ويمر بالنقطة $A(0, 0, 1)$

تطبيق 20

تقاطع مستوي مستقيم

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء، α, β, γ ثلاثة أعداد حقيقية غير معلومة.

نعتبر النقط $C(0, 0, \gamma), B(0, \beta, 0), A(\alpha, 0, 0)$

(1) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي من الشكل $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$

(2) أوجد تمثيلا وسيطيا لمستقيم يمر من O ويعامد المستوي (ABC) ثم استنتج

إحداثيات النقطة H مسقط النقطة O على المستوي (ABC) بدلالة α, β, γ

الحل

(1) لدينا $\vec{AB}(-\alpha, \beta, 0), \vec{AC}(-\alpha, 0, \gamma)$ و $(ABC): ax+by+cz+d=0$

مع $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$$(1) \dots\dots -a\alpha + b\beta = 0 \text{ يكافئ } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$(2) \dots\dots -a\alpha + c\gamma = 0 \text{ يكافئ } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$(3) \dots\dots a\alpha + d = 0 \text{ يكافئ } A \in (ABC)$$

بطرح (2) من (1) نجد $b\beta - c\gamma = 0$ ومنه $b = \frac{c\gamma}{\beta}$

نعوض b في (1) نجد $a = \frac{\gamma}{\alpha}c$

نعوض a في (3) نجد $d = -\gamma c$

إذن معادلة (P) تصبح $\frac{\gamma}{\alpha}cx + \frac{c\gamma}{\beta}y + cz - \gamma c = 0$

وبالقسمة على $c\gamma$ نجد $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$

(2) شعاع توجيه المستقيم المطلوب هو ناظم (P)

إذن هذا المستقيم يمر من $O(0,0,0)$ وشعاع توجيهه $\vec{n}(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$

وبالتالي التمثيل الوسيط لـ d هو $d: \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha}t \\ y = \frac{1}{\beta}t \\ z = \frac{1}{\gamma}t \end{cases}$

$$(s): \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha}t & \dots\dots\dots (1) \\ y = \frac{1}{\beta}t & \dots\dots\dots (2) \\ z = \frac{1}{\gamma}t & \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

H هي نقطة تقاطع d مع (P) وإحداثياتها تحقق

نعوض x, y, z في (4) نجد $\frac{t}{\alpha^2} + \frac{t}{\beta^2} + \frac{t}{\gamma^2} - 1 = 0$

ومنه نستنتج $t = \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \alpha^2 \beta^2} = 0$

إذن إحداثيات النقطة H هي $H(\frac{1}{\alpha}t_0, \frac{1}{\beta}t_0, \frac{1}{\gamma}t_0)$

الوضع النسبي لمستقيم وسطح كرة

تطبيق 21

$(\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء.

نقطته $I(0,1,-1)$ ، $C(2,2,2)$ ، $B(1,-6,-1)$ ، $A(-1,2,1)$

(1) أعط معادلة ديكرتية للمستوي (P) المار بالنقط C, B, A .

(2) مستوي ذو المعادلة $x+y-3z+2=0$ و (q) مستوي المعلم (a, \vec{i}, \vec{k})

(أ) لماذا (q) و (q') متقاطعان؟

(ب) عين نقطة E من Δ وشعاع توجيه له حيث Δ هو تقاطع (q) و (q')

(3) عين معادلة ديكرتية لسطح الكرة Σ مركزها I وطول نصف قطرها $\sqrt{26}$

(4) نعتبر النقطتين $J(-2,0,0)$ و $K(1,0,1)$ عين تقاطع Σ والمستقيم (JK)

الحل

(1) $\vec{n}(a,b,c)$ وناظمه $(P): ax+by+cz+d=0$

لدينا $\vec{AB}(2,-8,-2)$ ، $\vec{AC}(3,0,1)$

(1) $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ تكافئ $2a-8b-2c=0$

(2) $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ تكافئ $3a+c=0$

(3) $A \in (ABC)$ تكافئ $-a+2b+c+d=0$

من (2) نجد $c=-3a$ ونعوض c في (1) نجد $b=a$

نعوض b و c في (3) نجد $d=2a$

إذن $(P): ax+ay-3az+2a=0$ بالقسمة على a نجد $x+y-3z+2=0$

(2) لدينا $x+y-3z+2=0$ و $(q): y=0$

بما أن $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-3}$ فإن (q) و (q') متقاطعان.

الجملة $(s) \begin{cases} y=0 \\ x+y-3z+2=0 \end{cases}$ هي جملة معادلتين ديكرتيتين للمستقيم Δ

الجملة (s) تكتب $\begin{cases} x=3z-2 \\ y=0z+0 \\ z=1z+0 \end{cases}$ وبوضع $z=t$ تصبح $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0t \\ z=0+1t \end{cases}$ ومنه $E(-2,0,0)$

وشعاع توجيه Δ مركباته هي $(3,0,1)$

(3) معادلة سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{26}$ هي:

$$(\Sigma): x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 26$$

(4) التمثيل الوسيط للمستقيم (JK) هو $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0t \\ z=0+t \end{cases}$

بتعويض x, y, z في معادلة Σ نجد $t^2-2t-1=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $t_1=1+\sqrt{2}$ و $t_2=1-\sqrt{2}$

إذن (JK) يقطع Σ في نقطتين $M_1(1+3\sqrt{2}, 0, 1+\sqrt{2})$ و $M_2(1-3\sqrt{2}, 0, 1-\sqrt{2})$

تطبيق 22

المستقيمات والمستوي في الفضاء

نعتبر النقط $S(0,0,4)$ ، $C(0,6,0)$ ، $B(2,4,0)$ ، $A(4,0,0)$

$F(0,8,0)$ ، $E(6,0,0)$

(1) بين أن E هي تقاطع المستقيمين (BC) و (OA) ، و F هي تقاطع (AB) و (OC)

(2) أوجد معادلة (SEF) .

(ب) أوجد إحداثيات النقطة M مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(S,3)$

(ج) نعتبر المستوي (P) الموازي للمستوي (SEF) والمار من M تحقق أن معادلة (P)

هي $4x+3y+6z-22=0$.

3- المستوي (P) يقطع الأحرف $[SO]$ ، $[SA]$ ، $[SB]$ ، $[SC]$ من الهرم

$SOABC$ في C' ، B' ، A' ، C' على الترتيب.

$$C' \in [SC] \text{ وهذا يعني أن } \vec{CC'} = \frac{4}{6} \vec{CS}$$

$$\text{بما أن } 4 \times 0 + 3 \times 2 + 6 \times \frac{8}{3} - 22 = 0 \text{ فإن } C' \in (P)$$

$$\text{وبالتالي } C' \in [SC] \cap (P)$$

$$\text{(ج) لدينا } \vec{SB} (2, 4, -4) \text{ وبالتالي التمثيل الوسيط لـ } (SB) \text{ هو } \begin{cases} x=2t \\ y=4t \\ z=4-4t \end{cases} \text{ مع } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{إحداثيات } B' \text{ تحقق } \begin{cases} x=2t \\ y=4t \\ z=4-4t \\ 4x+3y+6z-22=0 \end{cases} \text{ وبعد حل هذه الجملة نجد } B' (1, 2, 2)$$

$$(4) \vec{AB'} (0, 2, -1), \vec{AC'} (0, 2, -1) \text{ ومنه } \vec{AB'} = \vec{AC'} \text{ وبالتالي الرباعي } OAB'C' \text{ متوازي أضلاع.}$$

تقاطع ثلاثة مستويات

تطبيق 23

نعتبر المستويات (P) و (D) و (R) معادلاتها على الترتيب :

$$-x+y+2z-1=0, \quad x-z=0, \quad x-y+z-2=0$$

بين أن تقاطع هذه المستويات هي نقطة وحيدة A يطلب تعيين إحداثياتها.

الحل

ندرس أولا تقاطع (P) و (D) ثم ندرس تقاطع ناتجهما مع المستوي (R)

$$(S) : \begin{cases} x-y+z-2=0 \dots (1) \\ x-z=0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{بما أن } \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1} \text{ فإن } (P) \text{ و } (D) \text{ متقاطعان في مستقيم } d$$

$$\text{نضع } x=t \text{ ومنه } y=2t-2 \text{ و } z=t \text{ إذن } d : \begin{cases} x=t \\ y=2t-2 \\ z=t \end{cases} \text{ مع } t \in \mathbb{R}$$

$$S : \begin{cases} x=t \\ y=2t-2 \\ z=t \\ -x+y+2z-1=0 \end{cases} \text{ ندرس تقاطع } d \text{ مع } (R)$$

$$\text{نعوض عبارة كل من } z, y, x \text{ في معادلة } (R) \text{ نجد } t=1$$

$$\text{إذن } z=1, y=0, x=1$$

$$\text{وبالتالي } (P) \cap (D) \cap (R) = \{A(1, 0, 1)\}$$

(أ) احسب إحداثيات النقطة O'

(ب) تحقق أن إحداثيات C' هي $(0, 2, \frac{8}{3})$

(ج) أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (SB) ثم استنتج إحداثيات النقطة B'

(4) تحقق أن $OAB'C'$ متوازي أضلاع.

الحل

$$(1) \text{ لدينا } \vec{OA} (4, 0, 0), \vec{OE} (6, 0, 0) \text{ ومنه } \vec{OE} = \frac{3}{2} \vec{OA}$$

إذن النقط O, E, A على استقامة واحدة أي E تنتمي إلى (OA)

$$\text{لدينا } \vec{BE} (4, -4, 0), \vec{BC} (-2, 2, 0) \text{ ومنه } \vec{BE} = -2 \vec{BC}$$

وبالتالي النقط B, C, E تقع على استقامة واحدة أي E تنتمي إلى (BC)

$$\text{إذن } (BC) \cap (OA) = \{E\}$$

بنفس الطريقة نجد $(OC) \cap (AB) = \{F\}$

$$(2) (1) \frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} = 1 \text{ (SEF)}$$

$$(ب) \text{ لتكن } (x, y, z) \text{ إحداثيات } A' \text{ تحقق } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\text{إذن } A' (1, 0, 3)$$

$$(ج) \text{ ليكن } \vec{n} \text{ ناظم لـ } (P) \text{ وبما أن } (P) \text{ يوازي (SEF) فإن } \vec{n} (\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4})$$

$$\text{إذن معادلة } (P) \text{ هي } \frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} + d = 0$$

$$A' \text{ تنتمي إلى } (P) \text{ يعني } \frac{1}{6} + \frac{0}{8} + \frac{3}{4} + d = 0 \text{ ومنه } d = -\frac{11}{12}$$

$$\text{إذن } (P) : \frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} - \frac{11}{12} = 0 \text{ بالتبسيط نجد } (P) : 4x + 3y + 6z - 22 = 0$$

$$(3) (1) \text{ التمثيل الوسيط لـ } (OS) \text{ هو } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=4t \end{cases}$$

$$\text{إحداثيات } O' \text{ تحقق } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=4t \\ 4x+3y+6z-22=0 \end{cases} \text{ وبعد حل هذه الجملة نجد } t = \frac{11}{12}$$

$$\text{ومنه } O' (0, 0, \frac{11}{3})$$

$$(ب) \text{ لدينا } \vec{CC'} (0, 4, -\frac{8}{3}), \vec{CS} (0, -6, 4) \text{ لاحظ أن } \vec{CS} = -\frac{6}{4} \vec{CC'}$$

تطبيق 24

المرجح والتحويلات النقطية

ABC مثلث، I مرجح الجملة (B, 2), (C, 1) و J مرجح (A, -1), (B, 2) و G مرجح (A, -1), (B, 2), (C, 1).
 (1) بين أن G هي تقاطع المستقيمين (AI) و (CJ).
 (2) نفرض أن A و C ثابتان وأن B تمسح المستقيم Δ بحيث (AC) و Δ لا ينتميان إلى نفس المستوى.
 (أ) بين أن G صورة B بالانسحاب يطلب تعيين شعاعه.
 (ب) استنتج الحل الهندسي لـ G لما B تمسح Δ.

✓ الحل

(1) لدينا من المعطيات :

$$\begin{cases} \vec{IC} + 2\vec{IB} = \vec{0} \\ -\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0} \\ -\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \end{cases}$$

$$-\vec{GA} + 2(\vec{GI} + \vec{IB}) + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{0}$$

$$-\vec{GA} + 3\vec{GI} + 2\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} = 3\vec{GI} \text{ وهذا يعني أن } G \text{ تنتمي إلى } (AI)$$

$$-(\vec{GJ} + \vec{JA}) + 2(\vec{GJ} + \vec{JB}) + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{GJ} + \vec{GC} - \vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$$

$$\vec{GJ} = -\vec{GC} \text{ ومنه } (G) \text{ تنتمي إلى } (CJ)$$

$$(CJ) \cap (AI) = \{G\}$$

$$-\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GA} + \vec{AC} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\vec{GB} = -\frac{1}{2}\vec{AC} \text{ ومنه } 2\vec{GB} = -\vec{AC}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ إذن } (G) \text{ هي صورة } B \text{ بالانسحاب الذي شعاعه } \vec{V}$$

(ب) بما أن G هي صورة B و B تمسح مستقيماً، وصورة مستقيم بالانسحاب هو مستقيم فإن G تمسح مستقيماً.

مقارن في مسائل

1 - ABCDEFGH مكعب حرفه 1

I هي مركز ثقل المثلث CFH و J مركز ثقل المثلث BDE. و k مرجح الجملة (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 1), (F, 1), (G, 1), (H, 1).

نعتبر المعلم $(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1- احسب إحداثيات النقط I, J, K

2- اعط تمثيلاً بسيطاً للمستقيم (AG)

2- بين أن النقط I, J, K تنتمي إلى المستقيم (AG) ثم حدد الأعداد u, t, s بحيث :

$$\vec{AI} = s\vec{AG} \text{ و } \vec{AJ} = t\vec{AG} \text{ و } \vec{AK} = u\vec{AG}$$

2 - لكن (C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r

E نقطة من القرص الذي مركزه O ونصف قطره r

(d) و (d') مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في E بحيث :

(d) يقطع الدائرة (C) في النقطتين A و C و (d') يقطعها في النقطتين B و D

لتكن I و J منتصفتي [AC] و [BC] على التوالي.

1- بين أن الرباعي OIEJ مستطيل.

2- استنتج أن النقطة G مرجح الجملة (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) هي نقطة

ثابتة من المستوى لا يتغير المستقيمان (d) و (d') مع بقائهما متعامدان في النقطة E.

3 - ABCD رباعي وجوه ولتكن P, Q و R ثلاث نقط حيث أن الرباعيات ABPC, ABQD

و ACRD متوازيات أضلاع.

(أ) بين أن P هي مرجح الجملة (A, -1), (B, 1), (C, 1)

(ب) عبر عن Q كمرجح للنقط D, B, A

(ج) عبر عن R كمرجح للنقط D, C, A

2- باستعمال الخاصية التجميعية وباختيار مناسب للمرجح I للنقط D, C, B, A

الزودة بمعاملات يطلب تعيينها.

بين أن المستقيمت (DP), (CQ) و (BR) متقاطعة في النقطة I ثم حدد موضعها

على كل مستقيم.

4 $ABCD$ رباعي وجوه، ولتكن النقطتين I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي
1-1) لتكن G_1 مرجح الجملة $(A, 1), (B, 1), (C, -1), (D, 1)$

غير عن \vec{IG}_1 بدلالة \vec{CD} ، ثم علم النقط I, J و G_1
(ب) لتكن G_2 مرجح الجملة $(A, 1), (B, 1), (D, 2)$
بين أن G_2 منتصف $[ID]$ ثم علمها.

(ج) بين أن IG_1DJ متوازي اضلاع ثم استنتج وضعية G_2 بالنسبة إلى G_1 و J
2- m عدد حقيقي، ولتكن G_m مرجح الجملة $(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)$
(ا) عين المجموعة E مجموعة قيم العدد m التي من أجلها يكون المرجح G_m موجودا.

(ب) نفرض فيما يلي أن $m \in E$ بين أن الشعاع $\vec{JG_m}$ ثابت.
(ج) استنتج المجموعة F مجموعة النقط G_m لما m تسمح E

5 في المستوي نعتبر المثلث ABC المتقايس الساقين الذي رأسه A وارتفاعه $[AH]$
بحيث $AH = BC = 4$

1- G هي مرجح الجملة $(A, 2), (B, 1), (D, 1)$ برر إنشائك لـ G ثم علمها.
2- لتكن M نقطة كيفية من المستوي:

(ا) بين أن الشعاع $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ شعاع طويلته 8

(ب) عين وارسم (ξ) مجموعة النقط M بحيث $\left\| \vec{V} \right\| = \left\| 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \right\|$

3- نعتبر الجملة $(A, 2), (B, n), (C, n)$ بحيث n عدد طبيعي ثابت:

(ا) بين أن G_n مرجح هذه الجملة موجود، ثم علم النقط G_2, G_1, G_0

(ب) بين أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة $[AH]$

(ج) احسب المسافة AG_n بدلالة n ثم عين نهاية AG_n لما n تؤول إلى $+\infty$
ثم حدد موضع G_n في هذه الحالة.

(د) لتكن (ξ_n) مجموعة النقط M بحيث $\left\| \vec{V} \right\| = \left\| 2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC} \right\|$

بين أن دائرة تمر بالنقطة A محددًا مركزها ونصف قطرها R_n ثم أنشئ (ξ_n) .

6 $ABCD$ رباعي وجوه، ولتكن النقط I, J و K منتصفات القطع $[AD]$ و $[BC]$
و $[IJ]$ على التوالي. و G هي مركز ثقل المثلث ABC .
بين أن النقط G, K و D على استقامة واحدة.

7 - ليكن متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ ولتكن النقطتان I و J منتصفي
القطعتين $[AC]$ و $[FH]$ على التوالي.

(1) ادرس تقاطع المستقيم (BJ) و المستوي (ACH)

(2) بين أن المستقيم (DJ) و المستوي (ACH) متقاطعان معينا نقط تقاطعهما.

8 - بين أنه يوجد مستقيم وحيد (d) يمر بالنقطة $A(-3, 1, 2)$ ويوازي كلا من
المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب:

$$x - y - 2z + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2x + y - 7 = 0 \quad \text{اعط تمثيلا وسطيا لـ } (d)$$

9 - نعتبر النقط $A(2, -1, 0), B(1, 1, -3), C(3, -1, 1)$ والشعاعين:

$$\vec{U}(1, 1, -1) \quad \text{و} \quad \vec{V}(-1, 0, 1)$$

عين تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (P) المزود بالعلم (C, \vec{U}, \vec{V})

10 - نعتبر النقط $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ من الفضاء بحيث
الأعداد الحقيقية a, b, c غير معدومة.

1- عين معادلة المستوي (ABC)

2- عين معادلة المستوي (P) المار بالنقطة $O(0, 0, 0)$ والموازي للمستوي (ABC)

3- عين معادلة المستوي (P') المار بالنقطة O ومنصف القطعتين $[CA]$ و $[CB]$

4- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P')

5 عين الوضعية النسبية للمستقيمين (d) و (AB)

11 $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

G مرجح الجملة $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$

1- عين إحداثيات النقطة G ثم بين أن المستقيم (OG) عمودي على المستوي (ABC)

2- النقط $A'(2, 0, 0), B'(0, 2, 0), C'(0, 0, 3)$ تحدد مستويا $(A'B'C')$

(ا) بين أن المعادلة $3x + 3y + 2z = 0$ هي معادلة ديكرارية للمستوي $(A'B'C')$

(ب) بين أن $M(x, y, z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t
بحيث $z = t, y = 0, x = 1 - t$

(ج) عين إحداثيات النقطة K تقاطع المستقيم (AC) و المستوي $(A'B'C')$

3- عين إحداثيات النقطة L تقاطع المستقيم (BC) و المستوي $(A'B'C')$

(ب) بين أن المستقيمتين (AB) و $(A'B')$ و (KL) متوازية

(ج) حدد تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ باستعمال النتائج السابقة.

12 - لتكن S نقطة ثابتة من كرة ثابتة (Σ) مركزها النقطة Ω .

نعتبر الرباعييات الوجوه $SABC$ المرسومة داخل الكرة (Σ) وبحيث أحرفها المرسومة
من S متعامدة متني متني